CONCOURS ESTP - ENSAM

d'admission à :

L'ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET METIERS

SESSION 1997

--------- Filière MP ---------

MATHÉMATIQUES 3

- Durée : 4 heures.
- Les deux problèmes sont indépendants.
- Respecter strictement la numérotation des parties et des questions.

PROBLEME 1

Soit E le R-espace vectoriel des suites réelles. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que si $a = (a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ est un élément de E, $f(a) = \alpha$, avec $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathrm{N}}$ et : $\forall n \in \mathrm{N},\ \alpha_n = a_n + 2a_{n+1}$.

I 1°) Montrer que f est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

2°) a) Soit F le sous-espace de E constitué des suites $a = (a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ avec $a_0 = 0$. Montrer que la restriction de f à F est une bijection de F sur E.

b) Soit $a \in \mathrm{F}$ et $\alpha = f(a)$. Montrer que si α converge vers 0, il en est de même de a.

3°) Soit $\alpha \in \mathrm{E}$. Déterminer les suites $b \in \mathrm{E}$ telles que $f(b) = \alpha$. Montrer que si α converge vers $l \in \mathrm{R}$, b est une suite convergente et préciser sa limite.

II On se propose d'étudier la suite $u = (u_n)_{n\in\mathrm{N}}$ définie par :

$$u_0 = u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et,} \quad \forall n \in \mathrm{N},\ u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_n u_{n+1}}\ .$$

1°) Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2°) Montrer que : $\forall n \geq 1,\ \frac{1}{3} \leq u_{n+1} - u_n \leq 1$.

3°) Soit $v = (v_n)_{n\in\mathrm{N}}$ la suite telle que :

$$\forall n \in \mathrm{N}^*,\ v_n = u_n - u_{n-1} \quad \text{et} \quad v_0 = u_0$$

Soit $\alpha = f(v)$. Montrer que la suite α est convergente. Quelle est sa limite ? En déduire la limite de la suite v.

4°) Montrer que, lorsque $n \to +\infty$, $u_{n+1} \sim u_n$.
On a toujours $\alpha = f(v) = (\alpha_n)_{n\in N}$. Déterminer un équivalent, quand $n \to +\infty$ de $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k$ et en déduire que $u_n \sim \frac{2n}{3}$.

5°) $\forall n \in N$, on note $w_n = \alpha_n - 2$. Donner un équivalent de w_n quand $n \to +\infty$.

6°) On rapelle que $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n} \sim \ln n$ quand $n \to +\infty$.

a) Soit $b = (b_n)_{n\in N}$ la suite définie par :

$$\forall n \in N \ , \ b_n = u_n - \frac{2n}{3} \quad \text{et} \quad \beta = f(b) = (\beta_n)_{n\in N} .$$

Donner un équivalent de β_n quand $n \to +\infty$.

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} (b_{n+1} - b_n)$, puis $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

c) Déterminer un équivalent de b_n quand $n \to +\infty$ et en déduire un développement asymptotique à deux termes de u_n quand $n \to +\infty$.

PROBLEME 2

Soit E un espace vectoriel euclidien. $L(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E. Si F est un sous-espace de E, on note $F^{\perp}$ l'orthogonal de F . Si $f \in L(E)$, on note f^* l'endomorphisme adjoint de f. Si $x \in E$, $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x .

1°) Soit $f \in L(E)$. Montrer que $Ker\, f^* \circ f = Ker\, f$ et $Im\, f^* \circ f = (Ker\, f)^{\perp}$.
On note dans la suite du problème $A = \{ f \in L(E) , \ f \circ f^* \circ f = f \}$.

2°) a) Caractériser les automorphismes de E appartenant à A .
b) Montrer que tout projecteur orthogonal appartient à A .

3°) Soit $f \in L(E)$. Montrer que $f \in A$ si et seulement si $f^* \circ f$ est un projecteur orthogonal.

4°) Soit $f \in L(E)$. Montrer que $f \in A$ si et seulement si :

$$\forall x \in (Ker f)^{\perp} , \ \|f(x)\| = \|x\| .$$

5°) Soit $f \in A$. Montrer que : $(Ker f)^{\perp} = \{ x \in E , \|f(x)\| = \|x\| \}$.

6°) On note $O(E)$ le groupe des isométries de E . Montrer que $O(E)$ est un ouvert et un fermé de A .

7°) Soit $f \in A$. Calculer $N(f) = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail